

# クーロンの土圧理論に関する考察

Takeshi Ushiro 右城 猛

(株)第一コンサルタンツ専務取締役 工学博士

## 1. はじめに

クーロン (Coulomb) は、電磁気分野の研究で有名であるが、生涯の大部分は土木、特に土質に関する仕事で活躍したと言われている。1764 年、27 才のときにはブルボン要塞で高さ 8m の擁壁の構築を担当している<sup>1)</sup>。

クーロンが「建築に関するいくつかの静力学的問題に最大・最小の原理を適用することについてのエッセイ」(Essais sur une application des règles de maximis et minimis à quelque problèmes de statique relatifs à l'architecture) という論文を発表したのは 1773 年である<sup>1)</sup>。当時、西欧ではオイラー(Euler)、ラグランジュ(Lagrange)ら多くの数学者によって「最小原理」に関する研究が活発に行われていた<sup>2)</sup>ので、クーロンもその影響を受けたようである。

クーロンが土圧理論を発表してからおよそ 230 年経つ。理論的に優れていることから、現在においても実用的土圧計算法として世界中で用いられており、我が国の土質力学の教科書にも紹介されている。しかし、最近、この内容に疑問を抱くようになった。クーロン土圧理論に対して誤解を招く表現になっているように思えるのである。

本稿では、クーロン土圧理論について筆者が日頃考えていることを述べる。

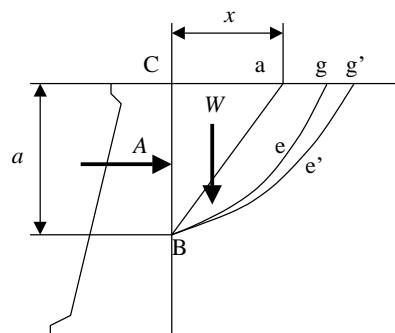
## 2. クーロンの土圧理論

クーロンは下記の仮定に基づいて、主働・受働土圧の算定式を誘導している。

- ① 土塊とすべり面との間の抵抗力は、粘着力と摩擦力の和として表される。
- ② 極限土圧には主働土圧と受働土圧が存在する。
- ③ 考えられるあらゆるすべり面の中で、擁壁を押す力が最も大きく(小さく)与えられるすべり面が主働(受働)すべり面であり、その時に与えられる土圧が主働(受働)土圧である。

主働・受働土圧の説明にクーロンが用いたのは図 1 である。主働土圧合力  $A$  を  $x$  の関数として表し、 $A$  が最大になるような  $x$  を式(1)のように、主働土圧合力  $A$  を式(2)のように求めている<sup>1)</sup>。

$$x = -\frac{a}{n} + a \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \dots \dots \dots (1)$$



$$A = ma^2 - cla \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $1/n$  は摩擦係数である。

クーロンの式を近代的な記号によって書き改めると次のようになる<sup>1)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} &= \tan \phi \\ \frac{x}{a} &= \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \\ m &= \frac{\gamma}{2} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \\ l &= 2 \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

クーロン土圧公式は、後に粉体力学の立場からランキン (Rankine, 1857) が導いた式(4)と全く同じである。

土圧公式の中で、唯一正解と言われているのが式(4)であるので、クーロンの土圧公式も正解を与えていることになる。

$$\left. \begin{aligned} P_A &= \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A - 2c \sqrt{K_A} \\ K_A &= \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

クーロンの土圧理論はその後ウォルトマン(Waltman, 1794)、フランシス (Francais, 1820)、ポンスレ (Poncelet, 1840) など多くの後継者によって拡張された。現在、我々が一般にクーロンの土圧公式と呼んでいるのは、ミュラー・ブレスロー(Müller-Breslau, 1906)によって誘導されたものである<sup>3)</sup>。

### 3. 壁の変位と土圧

多くの教科書では、土圧の章の冒頭で、図2のように壁の下端をヒンジとしたモデルを用いて土圧の説明がなされている。壁が下端を中心に回転すると、裏込め土の歪みは  $\varepsilon = \delta/l = \theta \tan \omega$  になり、壁全体にわたり一定となる。壁面土圧は裏込め土の歪  $\varepsilon$ 、つまり、壁の変位  $\delta$  に応じて変化する。

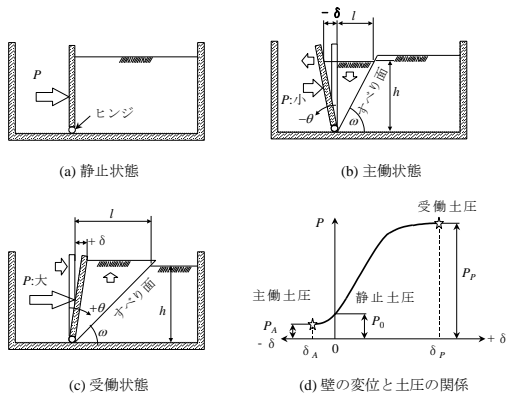


図2 壁の変位と土圧<sup>4)</sup>

変位が0の状態の土圧が静止土圧、壁が前方へ回転し地盤が破壊する直前の土圧が主動土圧、壁が後方へ回転し地盤が破壊する直前の土圧が受働土圧という訳である。

壁の変位によって壁面土圧が図2(d)のように変化する事は、多くの研究者が実験的に確認している。しかしながら、クーロンやランキン土圧理論の説明に図2を用いるのは適切でない。クーロンやランキン土圧理論では、壁の回転は全く考慮されていない。水平変位のみを前提としているのである。むしろ、斜面上に置かれた剛体ブロックの安定問題によって説明するのが適切である。

### 4. 斜面上のブロックの安定問題と土圧

土圧理論を理解するには斜面上に置かれた剛体ブロックの安定問題を考えるのがよい。図3(a)のように斜面の傾斜角  $\omega$  がブロック底面と斜面間の摩擦角  $\phi$  より大きいと、ブロックは不安定状態にあり、すべり運動をする。すべりを防ぐには図3(b)のように前方から  $P$  の力で押せばよい。最低  $P_A = W \tan(\omega - \phi)$  の力で押せばすべりを止めることができる。この  $P_A$  が主動土圧に相当する。

押す力を  $P_A$  より大きくすると、その力に応じてブロック底面の摩擦力が減少し、 $P_0 = W \tan \omega$  になるとブロック底面に摩擦は働かなくなる。このときの  $P_0$  が静止土圧である。

更に力を増加させると摩擦  $F$  は下向きに作用しブロックが斜面をすべり上がるのに抵抗する。ブロックがすべり上がりはじめる限界状態の力  $P_P = W \tan(\omega + \phi)$  が受働土圧に相当する。

クーロンが主動土圧を説明したのは、図4に示すように壁面が鉛直で滑らか、かつ、地表面が水平の場合である。

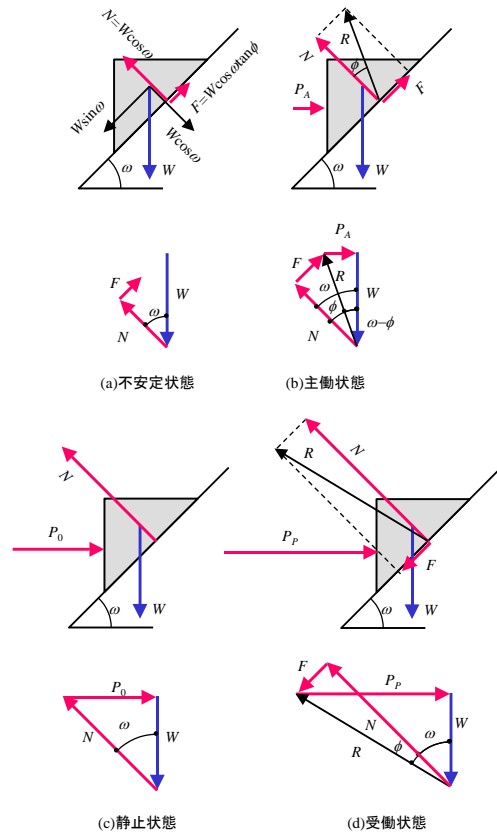


図3 斜面上の剛体ブロックの安定問題

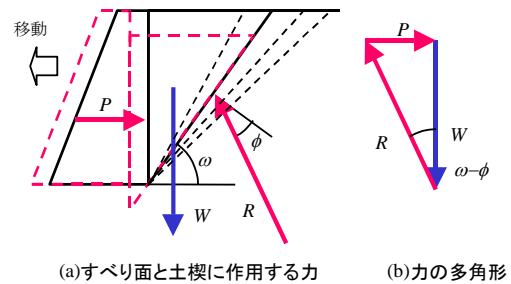


図4 クーロン土圧理論の説明

擁壁が前方へ微小移動すると、背後にくさびが形成される。このくさびに作用する力のつり合いを考えれば土圧が  $P = W \tan(\omega - \phi)$  として求められる。斜面の場合には、すべり面  $\omega$  を特定することができたが、擁壁の場合には無数にすべり面が考えられる。クーロンの土圧理論とは、 $P$  を最大化するすべり面  $\omega$  が主動すべり面であり、そのときの土圧が主動土圧というものである。

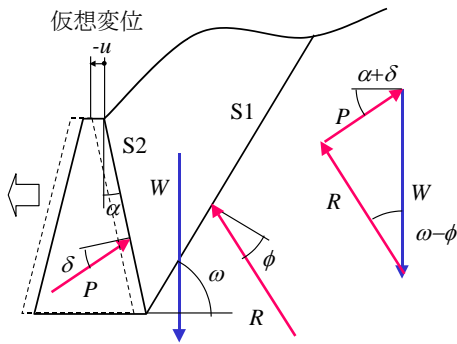


図 5 クーロン土圧の説明

### 5. Pの最大値が主働土圧という誤解

クーロン土圧の説明をより一般的な形で示すと図 5 となり、壁面土圧は式(5)で表される。αは壁面傾斜角、δは壁面摩擦角である。

$$P = \frac{\sin(\omega - \phi)}{\cos(\omega - \phi - \alpha - \delta)} W \dots\dots\dots (5)$$

土質力学の教科書や専門書では、Pを最大化するすべり角ωが主働すべり面であり、そのときのPが主働土圧と説明されている。つまり、式(5)のPが主働土圧であるための必要・十分条件は、式(6)で表されるというのである。

$$\frac{dP}{d\omega} = 0, \quad \frac{d^2P}{d\omega^2} < 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(6)がクーロンの土圧理論を誤解させる元凶になっている。また、この式では、主働土圧の物理的意味がよくわからない。筆者は、土圧理論を勉強しはじめた頃、Pを最大化すると主働土圧になり、最小化すれば受働土圧になるという教科書の意味を理解することができなかった。そのような折り、当時愛媛大学の助教授であった榎明潔先生から、土圧理論にも仮想仕事の原理と最小仕事の定理が適用できることを学び、目から鱗が落ちる思いがした。

擁壁が前方へuだけ仮想変位するとすれば、土圧による仕事はE = -uP̄ = -uP cos(α + δ)となる。主働土圧の場合には、土圧の方向と変位の方向が逆であるため、負の仕事をす。受働土圧の場合は、土圧の方向と変位の方向が同じであるため仕事は正である。自然界は最小仕事の原理にしたがって振る舞うので、主働、受働に関わらず土圧の仕事を最小化すれば良い。式(6)は、正しくは式(7)と表現すべきである。

$$\frac{dE}{d\omega} = 0, \quad \frac{d^2E}{d\omega^2} > 0 \dots\dots\dots (7)$$

ところで、すべり面S2が図4、図5のように壁面に沿って発生すれば、-u cos(α + δ)はωに関係なく一定になる。Eを最小化することとPを最大化することは同じになり、式(6)でも結果的には間違いではないということになる。しかし、式(6)を適用できるのは図5のように壁面が鉛直に

近くて、すべり面の一つが壁面に沿って発生する場合である。つまり、土圧の作用方向を限定できる場合に限られるのである。

### 6. すべり面に対する誤解

クーロンの土圧理論ではすべり面を直線と仮定している。この仮定が成り立つのは、図4に示したように壁面がなめらか(壁面摩擦係数δ=0)で壁面が鉛直(α=0)の場合に限られる。クーロンが主働・受働土圧を求めたのはδ=0、α=0の場合であるので、すべり面を直線と仮定したことは正しいといえる。

現在、我々が一般にクーロンの土圧公式と呼んでいるミュラー・ブレスローの式では、砂質土(c=0, φ>β)を対象に、壁面傾斜角αおよび地表面傾斜角βを考慮したものになっている。この場合もすべり面を直線と仮定しているが、実際には図5(a)に示すような曲線になる。主働土圧の場合には直線と仮定してもそれによる誤差は少ない。しかし、受働土圧では土圧を過大に算定することになるので注意が必要である。

最小仕事の原理によれば、曲線をも含め、運動学的に発生し得るすべり面の中で、最も土圧による仕事が小さくなるすべり面がより正解に近いということになる。

また、教科書では、図6(a)に示すabをすべり面と表現しているが、くさびが形成されるにはS1とS2の2本のすべり面が発生しなければならない。図6(a)に示すacもすべり面である。このことを説明した教科書は少ない。

壁面の傾斜角αが大きいと、すべり面は図6(b)のようにab, ac'になる。壁面摩擦角δは一般に裏込め土の内部摩擦角φより小さい。このため壁面傾斜角αが小さいと、すべり面はエネルギー消費が少なくなるよう壁面に沿って発生する。しかし、壁面傾斜角が大きいと盛土内部を通るほうがよりエネルギー消費が少なくなるためである。

逆T型擁壁やL型擁壁などかかと版を有する擁壁の場合も同じように2種類のすべり面が発生する。ところが、道路土工指針や道路橋示方書では、「かかと版が長い逆T型擁壁などでは、擁壁が前方へ移動すると、図7(a)に示すようにかかと版上の土は擁壁と一体的に挙動し、擁壁後端に鉛直の壁面(仮想背面)が形成される。

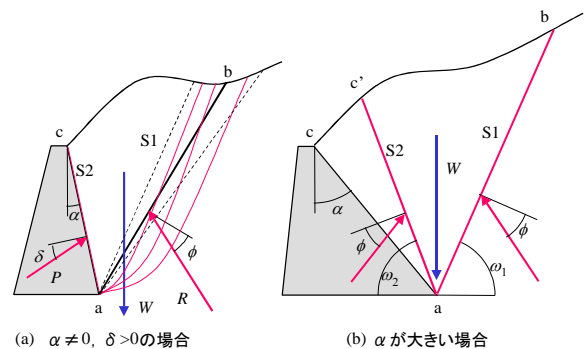
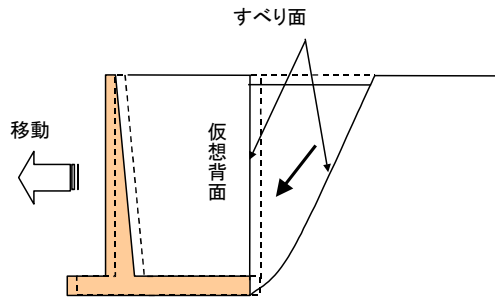
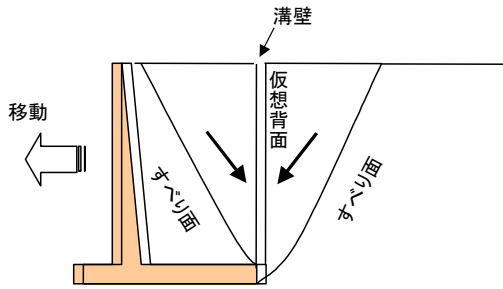


図 6 主働すべり面



(a) かかと版上の土が擁壁と一体的に挙動



(b) 溝壁が形成されすべり面は2本出現

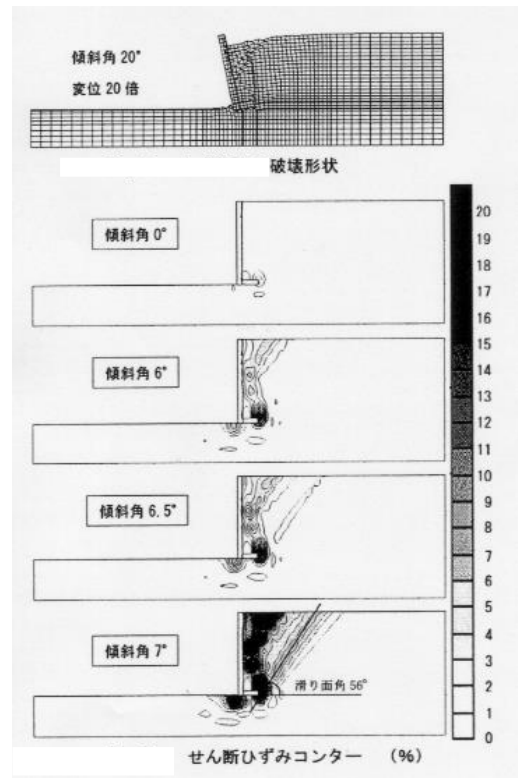
図 7 仮想背面とすべり面

したがって、この面を重力式擁壁の壁面と同じように見なして土圧を計算できる」と説明している。もしも、かかと版上の土と擁壁が一体となって前方へ移動するとすれば、鉛直の溝壁が形成される。そうすると溝壁は自立できないので、前後の土砂が滑落し、図 7(b)のように2種類のすべり面が出現することになる。道路土工指針や道路橋示方書に示されているように背後のみにすべり面が出現するという考えは間違っている。

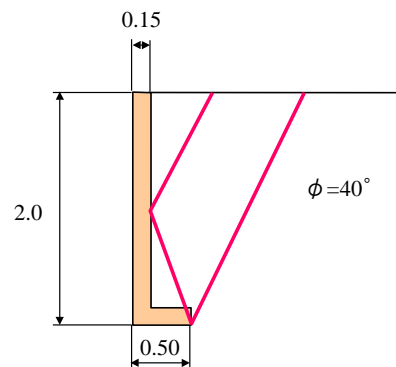
## 7. 仮想背面をすべり面と見なす誤解

道路橋示方書では、逆T式橋台の土圧算定において、底板のかかとから鉛直の仮想背面を立てて、この面を重力式橋台の壁面と同じように考え土圧を計算するものとしている。これは、仮想背面をすべり面と勘違いしていることになる。仮想背面での土圧傾斜角を壁面摩擦角と称することからしておかしい。

2001年6月に、徳島で地盤工学会の研究発表会があった。「土圧」のセッションで明治大学大学院の今田美幸さんが「L型擁壁と背面地盤の挙動に関する実験と有限要素解析」と題して発表された<sup>5)</sup>。図 8(a)のL型擁壁にFEM解析を適用した結果、クーロン土圧理論と同様に $\omega=56^\circ$ の主働すべり面が現れた、という内容の発表であった。この発表に対して、「かかとから“く”の字形のすべり面が発生している。これは仮想背面が曲がったのでしょうか」という趣旨の質問があった。仮想背面をすべり面の一つと勘違いされたのであろう。



(a) FEMによる解析(田中・今田, 2001)



(b) 改良試行くさび法による解析

図 8 田中・今田による FEM 解析結果との比較

仮想背面は、内力である土圧を算定するための便宜的な基準線にすぎない。任意の角度で設定してもよいが、安定計算を容易にするため鉛直に設定しているにすぎないのである。今田さんがFEM解析されたL型擁壁はかかと版が短かったため、前述したS2すべり面がたて壁に当たり折れ曲がったのである。私の提案する改良試行くさび法<sup>6)</sup>で計算すると、図 8(b)となりFEMによる解析結果と全く同じすべり面が表れる。

## 8. 改良試行くさび法と最小仕事の原理

逆T型擁壁やL型擁壁などの仮想背面に作用する主働土圧は、盛土面が一様勾配であればランキン式によって算定することができる。しかしながら、図9に示すような場合には、ランキン式は適用できない。このような場合の主働土圧合力 $P_A$ と土圧の傾斜角 $\delta$ は式(8)~式(10)で計算す

ることができる。

この計算法の詳細は、拙著「続・擁壁間設計法と計算例」等<sup>6)~8)</sup>に詳述してあるので参照されたい。

$$P_A = \frac{W_1 + R_1 \sin(\omega - \phi)}{\cos \delta} \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{W \sin(\omega_2 - \phi)}{\sin(\omega_1 + \omega_2 - 2\phi)} \\ R_2 &= \frac{W \sin(\omega_1 - \phi)}{\sin(\omega_1 + \omega_2 - 2\phi)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{W_1 - R_1 \cos(\omega_1 - \phi)}{R_1 \sin(\omega_1 - \phi)} \dots \dots \dots (10)$$

$P_A \cos \delta$  を最大化する  $\omega_1, \omega_2$  を探索すれば、それが主働すべり角であり、そのときの  $P_A$  が主働土圧である。試行くさび法の場合は  $\omega_1$  のみ探索すればよいが、改良試行くさび法は  $\omega_1, \omega_2$  の両方を探索しなければならない。一見

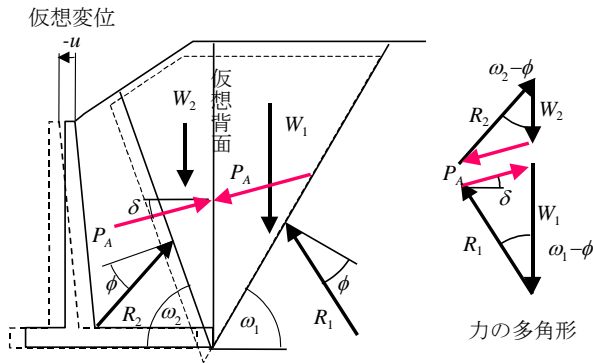


図 9 改良試行くさび法<sup>6)</sup>

複雑そうであるが、表計算ソフト Excel などのソルバー機能を用いれば簡単に探索できる。

改良試行くさび法を提案した当初、土木学会の研究発表の会場で、数人の研究者から「主働土圧を求めるのであれば、 $P_A \cos \delta$  をなぜ最大化するのか、 $R_2$  を最大化すべきでないか」という質問を受けた。 $R_2$  あるいは  $P_A$  を最大化するという発想はクーロン土圧理論の誤った解釈による。前述したように、土圧合力を最大化するのではなく、土圧による仕事を最小化すべきなのである。擁壁の仮想変位を  $u$  とすれば、 $R_2$  による仕事は  $-uR_2 \sin(\omega_2 - \phi)$  である。 $P_A$  による仕事は  $-uP_A \cos \delta$  である。図 9 のくさび土塊に作用する力のつり合い状態を示した力の多角形を見れば、 $R_2$  による仕事も  $P_A$  による仕事も  $R_1$  による仕事も同じになることは明らかである。主働すべり角  $\omega_1, \omega_2$  を求めるには、次式のいずれを用いてもよいことが容易に理解されよう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_1} P_A \cos \delta &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_2} P_A \cos \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_1} R_2 \sin(\omega_2 - \phi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_2} R_2 \sin(\omega_2 - \phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_1} R_1 \sin(\omega_1 - \phi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_2} R_1 \sin(\omega_1 - \phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

改良試行くさび法を用いると、土圧作用方向  $\delta$  を仮定する必要はない。理論的に求めることができるのである。

### 9. 物部・岡部式が実態と合わない理由

1924 年になって、ミューラー・ブレスローの式を地震時土圧に拡張した 2 つの論文が土木学会誌に掲載された。物部氏による「地震上下動に関する考察並びに振動雑論」<sup>9)</sup> と岡部氏による「General Theory on Earth Pressure and Sismic Stability of Retaining Wall and Dam」<sup>10)</sup> である。

二編の論文とも震度法に基づいたもので、誘導過程は図 10 のように両者で若干異なるものの全く同じ式であったことから、物部・岡部式という名前で世界的に知られている。

物部・岡部式を実際の地震被害例に適用すると整合性がよくない。地震加速度は動的であるにもかかわらず、物部・岡部式では地震力を静的荷重として取り扱っているためである。

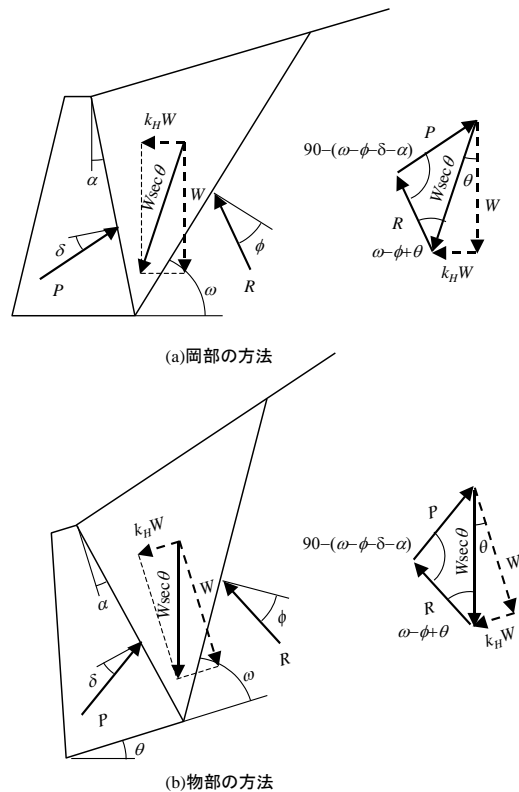


図 10 震度法による地震時土圧

1999年に台湾集集地震被害を視察したのをきっかけに地震時土圧に興味を持つようになり、剛体運動力学で簡単に動土圧を求めることができるのではないかと考えていた。

2001年5月に鳥取大学と鳥取県技術士会が主催する講習会があり、講師として招かれた。そのときに鳥取大学の榎明潔教授<sup>11)</sup>が、私が考えていたのとはほぼ同じ理論ですすでに定式化されていることを知り驚いた。

2001年12月に国土交通省国土技術政策総合研究所危機管理技術研究センター地震災害研究官の松尾修氏から地震時土圧に関する講演をしていただいた。建設省土木研究所(現・独立行政法人土木研究所)動土質研究室では、すでに図11のような地盤・裏込め土・擁壁からなる剛体モデルを用いて動土圧算定式を導き、その妥当性を動的遠心模型実験で確認していることを聞き、再び驚かされた。

式(14)は松尾氏らによって導かれた動土圧公式である<sup>12)</sup>。クーロン土圧同様にすべり面の角度 $\omega$ を変化させて計算し、 $P$ の最大値を求めればそれが地震時主働土圧になる。

地震時土圧は、裏込め土の内部摩擦角 $\phi$ 、壁面摩擦角 $\delta$ 、すべり土塊質量 $m$ 、地盤の地震時加速度 $\ddot{X}$ だけでなく、擁壁の質量 $M$ 、擁壁底面と地盤の摩擦係数 $\mu$ の影響も受ける。地震加速度が小さいと、擁壁は地盤と一体的に運動するが、加速度が大きくなると擁壁はすべり出す。このため土圧はある一定以上に増えない。むしろ若干ではあるが減少する。

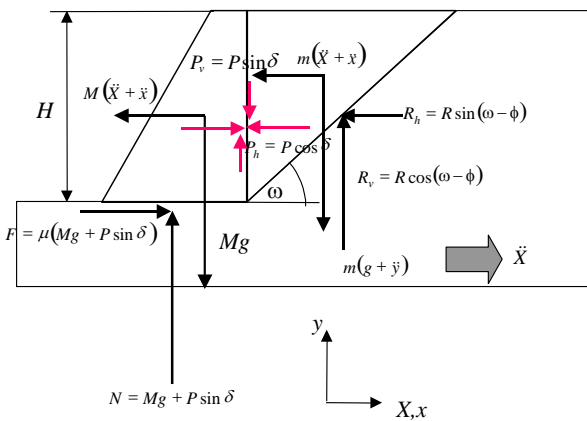


図11 動土圧の解析モデル<sup>12)</sup>

物部・岡部式は、水平震度が小さくて擁壁が地盤と一緒に運動するような場合に適用できるものであり、水平震度が大きくなる大地震に適用すると過大な土圧を与えると云える。

$$P = \frac{(\sin \Omega + \mu \Lambda)g - \tan \omega \sin \Omega \ddot{X}}{M \cos(\Omega - \delta) + m(\cos \delta - \mu \sin \delta)\Lambda} m M \quad \dots (14)$$

$$\Lambda = \cos \Omega + \tan \omega \sin \Omega$$

$$\Omega = \omega - \phi$$

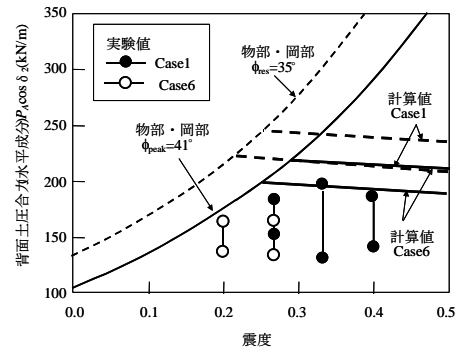
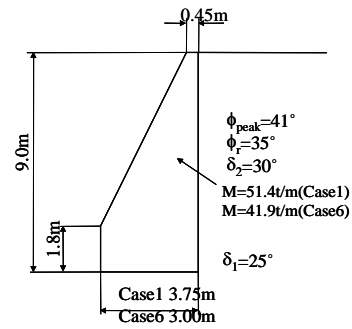


図12 建設省土木研究所による動的遠心模型実験<sup>12)</sup>

## 10. あとがき

クーロン理論は、クーロンが用いた解析モデルに対しては力学的な矛盾がない。しかし、それを拡張する過程で工学的判断に基づいた種々の仮定が導入されたため、力学的厳密性を欠いたものになっている。したがって、クーロン系土圧式を適用する場合には、それが誘導された前提条件を十分理解した上で活用する必要がある。

### 参考文献

- 1) 福岡正巳編：新しい土圧入門，近代図書，1982
- 2) 山本義隆：古典力学の形成，日本評論社，1997.
- 3) John N. Cernica：Foundation Design Handbook, John Wiley & Sons, pp.288, 1995.
- 4) 右城猛：新・擁壁の設計法と計算例，理工図書，1999.
- 5) 田中忠次，今田美幸：L型擁壁と背面地盤の挙動に関する実験と有限要素解析，第36回地盤工学研究発表会(徳島)2001.6
- 6) 右城猛：続・擁壁の設計法と計算例，理工図書，1998.
- 7) 右城猛，八木則男，矢田部龍一，筒井秀樹：かかと版付き擁壁の合理的な土圧評価法，土木学会論文集，No.567/VI-35, 1997.
- 8) 右城猛，筒井秀樹：片持ばり式擁壁の合理的な土圧計算法の一試案，土木技術，Vol.54, No.8, 1999.
- 9) 物部長穂：地震上下動に関する考察並びに振動雑論，土木学会誌，Vol.10-5, 1924.
- 10) Okabe.S.: General Theory on Earth Pressure and Seismic Stability of Retaining Wall and Dam. 土木学会誌，Vol.10-6, 1924.
- 11) 榎明潔，岡田順三：地震時の土圧に関する研究，第37回地盤工学研究発表会(大阪)，2002.7
- 12) 松尾修，斉藤由紀子，岡村未対：擁壁に作用する地震時主働土圧に関する考察および比較計算，第26回地震工学研究発表会，2001.8